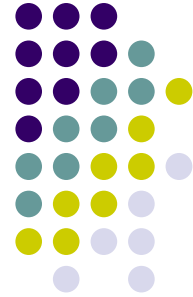


Mátrixok és lineáris egyenletrendszerek

A fizika numerikus módszerei I.
mf1n1a06- mf1n2a06
Csabai István



Mátrixok megadása



```
octave:##> A=[5 7 9  
-1 3 -2]  
A =  
 5 7 9  
-1 3 -2
```

- Javasolt kiírni a ,-t és ;-t

```
octave:##> B=[2, 0; 0, -1; 1, 0]  
B =  
 2 0  
 0 -1  
 1 0
```

Mátrixok megadása soronként



```
octave:##> D=[1 2 3];  
octave:##> D=[D; 4 5 6];  
octave:##> D=[D; 7 8 9]
```

```
D =  
  1  2  3  
  4  5  6  
  7  8  9
```

Műveletek



```
octave:##> A*B  
ans =
```

```
 19  -7  
 -4  -3
```

- A mátrix szorzás nem felcserélhető!

```
octave:##> B*A  
ans =
```

```
 10  14  18  
  1  -3   2  
  5   7   9
```

Mátrix és vektor szorzata



```
octave:##> x=[1; 0; 3]
```

```
x =
```

```
1
```

```
0
```

```
3
```

```
octave:##> A*x
```

```
ans =
```

```
32
```

```
-7
```

Téves sor/oszlop szám



```
octave:##> x=[1 0 3]
```

```
x =
```

```
1 0 3
```

```
octave:##> A*x
```

```
error: operator *: nonconformant  
arguments (op1 is 2x3, op2 is  
1x3)
```

```
error: evaluating binary operator  
'*' near line 12, column 2
```

Tranzponálás



```
octave:##> A
```

```
A =
```

```
    5    7    9
   -1    3   -2
```

```
octave:##> A'
```

```
ans =
```

```
    5   -1
    7    3
    9   -2
```

Komplex mátrixoknál komplex konjugálással együtt



```
A =
```

```
    5 + 0i    7 + 0i    9 + 0i
   -1 + 0i    3 + 0i    0 + 1i
```

```
octave:48> A'
```

```
ans =
```

```
    5 - 0i   -1 - 0i
    7 - 0i    3 - 0i
    9 - 0i    0 - 1i
```

Speciális mátrixok



```
octave:##> I = eye(4)
```

```
I =
```

```
1 0 0 0
```

```
0 1 0 0
```

```
0 0 1 0
```

```
0 0 0 1
```

<code>eye</code>	Create an identity matrix
<code>zeros</code>	Create a matrix of zeros
<code>ones</code>	Create a matrix of ones
<code>rand</code>	Create a matrix filled with random numbers
<code>diag</code>	Create a diagonal matrix, or extract the diagonal of the given matrix
<code>inv</code>	Inverse of a matrix
<code>det</code>	Determinant of a matrix
<code>trace</code>	Trace of a matrix
<code>eig</code>	Calculate the eigenvectors and eigenvalues of a matrix
<code>rank</code>	Calculate an estimate of the rank of a matrix
<code>null</code>	Calculate a basis for the null space of a matrix
<code>rref</code>	Perform Gaussian elimination on an augmented matrix
<code>lu</code>	Calculate the LU decomposition of a matrix
<code>qr</code>	Calculate the QR decomposition of a matrix
<code>svd</code>	Calculate the SVD of a matrix
<code>pinv</code>	Calculate the pseudoinverse of a matrix

Összetett mátrixok



```
octave:##> comp = [eye(3), B;  
                  A, zeros(2,2)]
```

```
comp =
```

```
1 0 0 2 0
```

```
0 1 0 0 -1
```

```
0 0 1 1 0
```

```
5 7 9 0 0
```

```
-1 3 -2 0 0
```

A mátrix mint adat-táblázat



```
octave:##> t=0:0.2:1;
octave:##> freq=[sin(t)' sin(2*t)',
  sin(3*t)']
freq =
0      0      0
0.1987 0.3894 0.5646
0.3894 0.7174 0.9320
0.5646 0.9320 0.9738
0.7174 0.9996 0.6755
0.8415 0.9093 0.1411
```

A mátrix elemei



```
octave:##> J = [
1 2 3 4
5 6 7 8
11 13 18 10];

octave:##> J(1,1)
ans =
1

octave:##> J(2,3)
ans =
7

• 1-2 sorok, 4. oszlop
octave:##> J(1:2, 4)
ans =
4
8
```

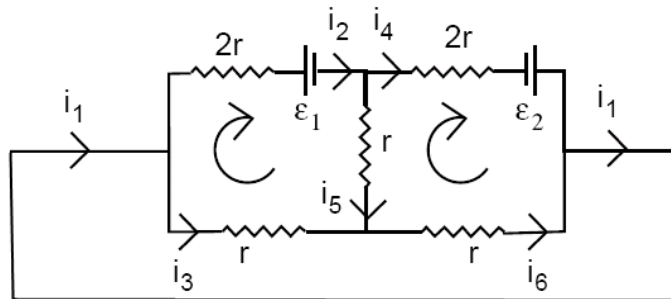
• Teljes 3. sor

```
octave:##> J(3, :)
ans =
11 13 18 10
```

• Elemek változtatása

```
octave:##> J(3, 2:3) = [-1 0]
J =
1 2 3 4
5 6 7 8
11 -1 0 10
```

Lineáris egyenletrendszerek



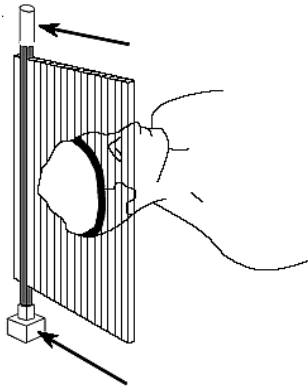
- Milyen áramok folynak az áramkörben adott ε_1 és ε_2 telepfeszültségek és r ellenállás esetén?

Lineáris egyenletrendszerek



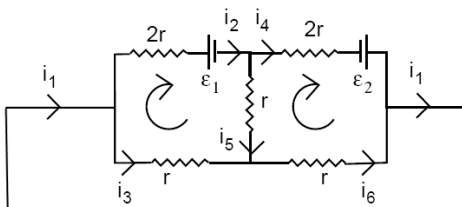
- Élesítsük ki a képet!

Lineáris egyenletrendszerek



- A Röntgen-mérésekből állapítsuk meg, a páciens agyában lévő vérrög helyzetét!

Lineáris egyenletrendszerek



$$i_2 + i_3 = i_1$$

$$i_3 + i_5 = i_6$$

$$i_4 + i_6 = i_1$$

$$i_4 + i_5 = i_2$$

$$-2i_2r - \epsilon_1 - i_5r + i_3r = 0$$

$$-2i_4r + \epsilon_2 + i_6r + i_5r = 0$$

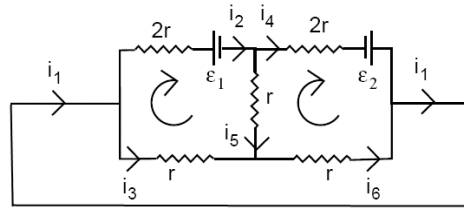
- Kirchoff-törvények
 - Egy csomópontba befolyó áramok összege megegyezik az onnan elfolyó áramok összegével (töltésmegmaradás)
 - Bármely zárt hurokban a hálózati elemeken – adott körüljárási irány mellett – a rajtuk lévő feszültségek előjelhelyesen vett összege nulla.

Lineáris egyenletrendszerek



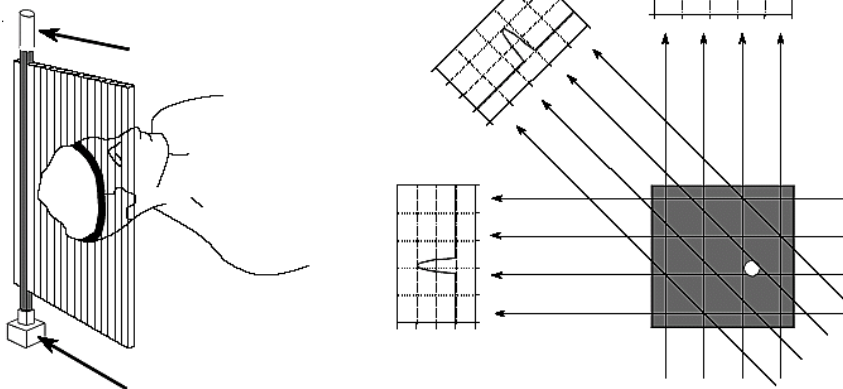
```

octave:##> r = 100;
octave:##> ep1=1.5;
octave:##> ep2=3.0;
octave:##> A=
[ 1 -1 -1 0 0 0;
  0 0 1 0 1 -1;
 -1 0 0 1 0 1;
  0 1 0 -1 -1 0;
  0 -2*r r 0 -r 0;
  0 0 0 -2*r r r];
octave:##> E=[0 0 0 0 ep1 -ep2]';
octave:##> currents=inv(A)*E
currents =
-2.8599e-02
-2.9840e-03
-1.3470e-02
 3.7622e-04
-9.0000e-03
-1.5186e-02
    
```



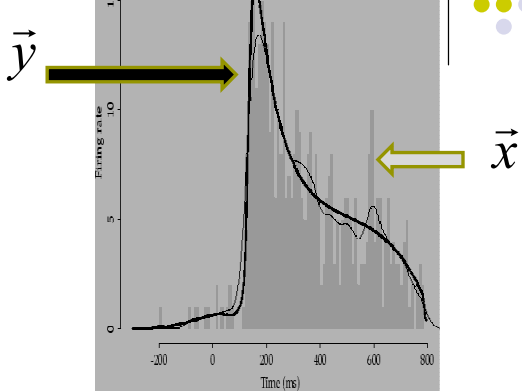
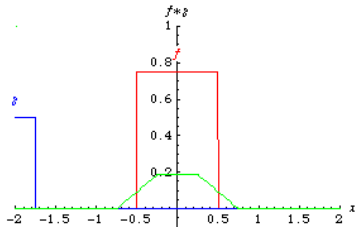
$$\begin{aligned}
 i_2 + i_3 &= i_1 \\
 i_3 + i_5 &= i_6 \\
 i_4 + i_6 &= i_1 \\
 i_4 + i_5 &= i_2 \\
 -2i_2r - \epsilon_1 - i_5r + i_3r &= 0 \\
 -2i_4r + \epsilon_2 + i_6r + i_5r &= 0
 \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszerek : tomográfia



- Egy szeletben $N \times N$ pixel
- A sugár-irányba eső pixel(részlet)ek összegét mérjük
- Ha elég sok mérés van, az összegekből visszaszámolható az eloszlás
- Inverz probléma: lineáris egyenletrendszer

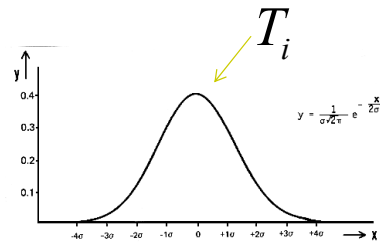
Konvolúció-dekonvolúció



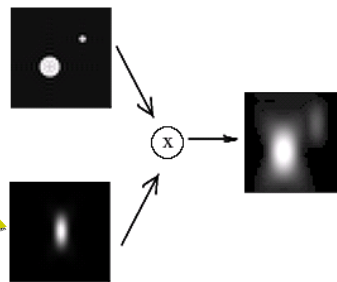
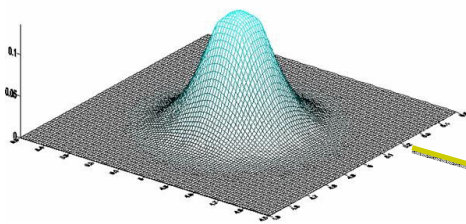
$$T = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-2} & r_{n-1} \\ r_{-1} & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-2} \\ r_{-2} & r_{-1} & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{-(n-3)} & r_{-(n-4)} & \dots & r_{-1} & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_{-(n-2)} & r_{-(n-3)} & \dots & \dots & \dots & r_0 & r_1 \\ r_{-(n-1)} & r_{-(n-2)} & \dots & \dots & \dots & r_{-1} & r_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}T = \vec{y}$$

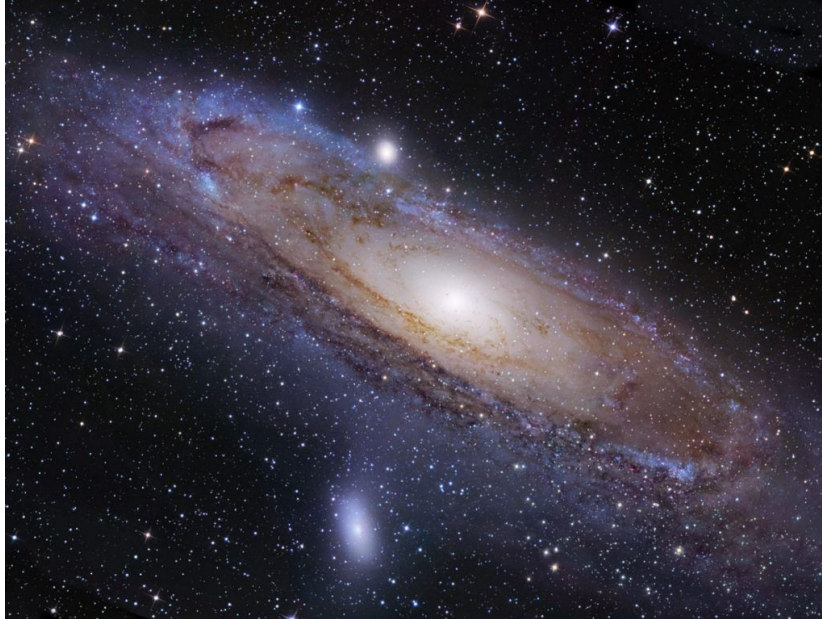
$$T^{-1}\vec{y} = \vec{x}$$



Dekonvolúció – 2 dimenzióban



Lineáris egyenletrendszerek



- Élesítsük ki a képet!

Lineáris egyenletrendszer



- Szinte minden feladat (paraméter-becslés, függvényillesztés, interpoláció, bizonyos differenciál egyenletek ...) erre vezet
- Sok speciális módszer – sok algoritmus
- A numerikus módszerek egyik fő kihívása: gyorsabb, pontosabb algoritmusok tervezése
- Most nem vesszük részletesen: csak használjuk

Futási idő



- Mátrix invertálás – lineáris egyenletrendszer megoldás műveletigénye (futási idő)

$$T \sim N^3$$

Problémák



- Szinguláris mátrix – nincs megoldás
- Alulhatározott mátrix – több megoldás
- Matematikailag egzaktul megoldható probléma a numerikus kerekítések miatt
 - Nincs megoldás
 - Pontatlan, hibás eredmény

Megoldás invertálással és a \ operátorral



```
octave:##>A=[1, 1; 2, -3];
octave:##> b=[3 5]';
octave:##> inv(A)*b
ans =
    2.8000
    0.2000
```

- Ellenőrzés:

```
octave:##> A*ans
ans =
    3.0000
    5.0000
```

```
octave:##>A\b
ans =
    2.8000 0.2000
```

Gyorsabb !!

Szinguláris mátrix



$$\begin{aligned}u + v + w &= 2 \\ 2u + 3w &= 5 \\ 3u + v + 4w &= 6\end{aligned}$$

```
octave:##>A=[1 1 1
            2 0 3
            3 1 4];
octave:##>b=[ 2 5 6]';
octave:##>x=a\b;
warning: matrix singular to machine precision, rcond = 1.15648e-17
warning: attempting to find minimum norm solution
x =
    0.69048
   -0.11905
    1.09524
octave:##>a*x
ans =
    1.6667
    4.6667
    6.3333
```

Rosszul kondicionált mátrix



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix}$$

```
octave:##>M=[1 1; 1 1.01]; b=[2; 2.01];
octave:##>x=M\b
x =
  1.00000
  1.00000
```

- **Kis perturbáció**

```
octave:##>M(1,2)=1.005;
octave:##>x=M\b
x =
 -0.0100000
  2.0000000
```

- **Nagyobb mátrixoknál könnyebben előfordul!**

Futási idő mérése Octave-ban



- `tic` : stopper indítása
- `toc` : stopper leállítása

```
octave:8> tic; x=A\x; toc
ans = 0.00046100
```

Adatok beolvasása/kiírása



```
octave:9> save myMatrix A
bash-3.00$ cat myMatrix
# Created by Octave 2.1.57, Tue Mar 06
  11:10:01 2007 CET
  <csabai@evghungmt.colbud>
# name: A
# type: matrix
# rows: 2
# columns: 2
  1 2
  5 4
```

Adatok beolvasása/kiírása



```
octave:14> clear all
octave:15> A
error: `A' undefined near line 15 column
  1
octave:15> load myMatrix
octave:16> A
A =
  1 2
  5 4
```

Adatok beolvasása/kiírása



```
bash-3.00$ cat matrix2.dat
```

```
3 5 7
```

```
1 2 3
```

```
2 7 1
```

```
octave:17> B = load matrix2.dat
```

```
B =
```

```
3 5 7
```

```
1 2 3
```

```
2 7 1
```

- További formátumok: Octave Manual 16. fejezet

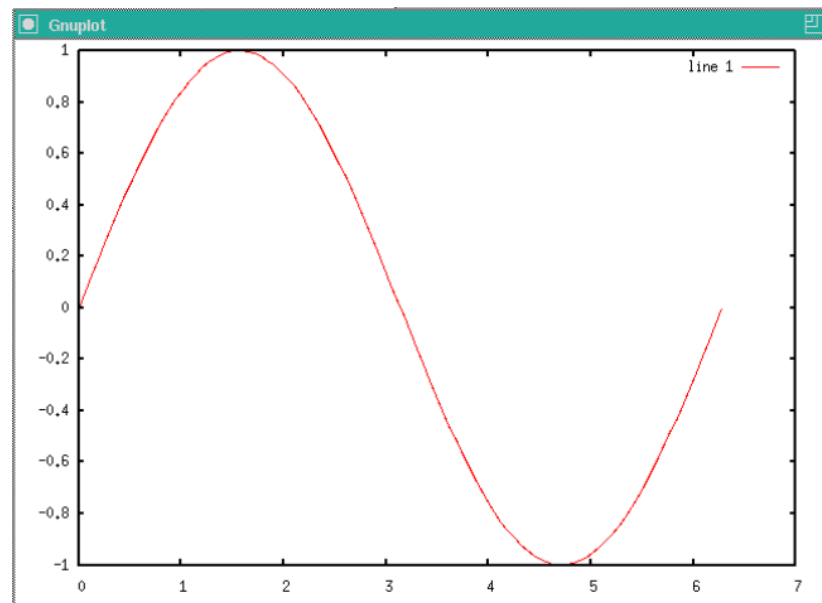
Adatok ábrázolása



```
octave:##> angles=linspace(0,2*pi,100);
```

```
octave:##> y=sin(angles);
```

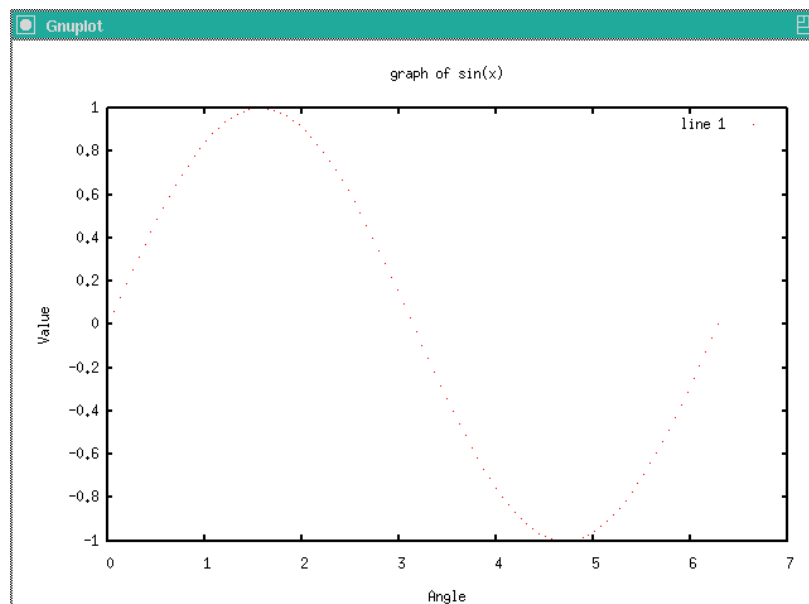
```
octave:##> plot(angles, y);
```



Adatok ábrázolása



```
octave:##> angles=linspace(0,2*pi,100);  
octave:##> y=sin(angles);  
octave:##> title('graph of sin(x)')  
octave:##> xlabel('Angle')  
octave:##> ylabel('Value')  
octave:##> plot(angles, y, 'ro');
```





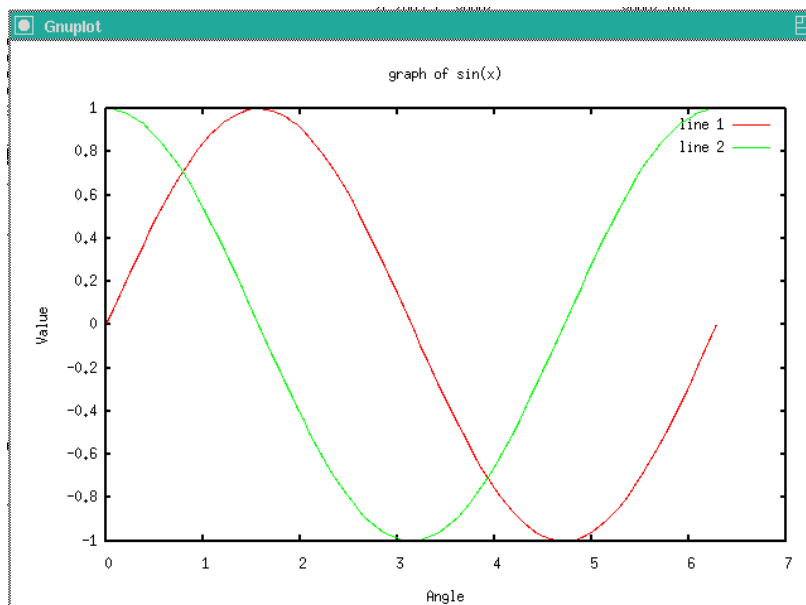
- : Vonal
- : pontok
- @: szimbólumok
- @: Vonal + szimbólumok
- ^: tűskék
- L: lépcsők
- n: $n = 1 - 6$: színek
- c: "k", "r", "g", "b", "m", "c", vagy "w," : színek: black, red, green, blue, magenta, cyan, vagy white
- +:
- o:
- x:

További stílusok az Octave Manual-ban

Több görbe egy ábrán



```
octave:##> plot(angles, y, angles, cos(angles))
```



Gyakorlat



- Kötelező előző héten:
 - Stoyan G. MATLAB könyv, 54-67.o.
- Kötelező olvasandó gyakorlatig:
 - Stoyan G. MATLAB könyv, 67-72.o.
 - P.J.G. Long: Octave Tutorial, 38-44. o. 49-52. o.
- Ajánlott olvasmány:
 - Stoyan G. MATLAB könyv, 72-86.o.
- Feladatok: weben
- A „diary” fájl-t kell elküldeni e-mailben a fizNum1 **kukac** gmail **pont** com címre