

Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

Legyen \mathbf{A} egy $N \times N$ -es mátrix. Ennek *sajátértéke* λ *sajátvektora* pedig \mathbf{x} ha fennáll a következő egyenlet:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Nyilván tetszőleges skalárszorosa a sajátvektornak szintén sajátvektor, ezeket nem tekintjük sajátvektornak. A $\mathbf{0}$ vektort (triviális megoldás) szintén nem tekintjük sajátvektornak. A fenti egyenlet csak akkor teljesülhet, ha:

$$\det |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}| = 0$$

A sajátértékek megtalálásának legegyszerűbb módja a fenti determináns kifejtése. Ezzel kapunk egy N -ed rendű polinomot (karakterisztikus egyenlet) melynek gyökei a sajátértékek. Láthatjuk tehát, hogy N sajátérték van, amik között lehetnek egyformák (degeneráltak) is. Ez a módszer általában csak $N < 4$ esetben optimális, ahol explicit megoldó képlet van a polinom gyökeinek megkeresésére. A magasabb rendű polinom gyökkeresése messze nem optimális módszer a sajátértékprobléma megoldására.

Tételek, összefüggések:

Ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $\tau \mathbf{x}$ -et, akkor a sajátértékek eltolódnak, de a sajátvektorok változatlanok maradnak.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \tau \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \tau \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{A} + \tau \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = (\lambda + \tau) \mathbf{x}$$

Ezt az invarianciát sok algoritmus kihasználja.

A mátrix *szimmetrikus*, ha $a_{ij} = a_{ji}$ vagyis megegyezik a transzponáltjával $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

A mátrix *hermitikus*, ha $a_{ij} = a_{ji}^*$ vagyis megegyezik a transzponáltjának a komplex konjugáltjával $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$.

A mátrix *ortogonális*, ha a megegyezik a transzponáltjának inverzével, vagyis $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{1}$.

A mátrix *normál*-mátrix, ha felcserélhető a Hermite-konjugáltjával, $\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^H$

A mátrix *unitér*, ha a Hermite-konjugáltja megegyezik az inverzzel $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1}$.

Valós mátrixokra a hermitikus és szimmetrikus, valamint az unitér és az ortogonális tulajdonság ekvivalens, és mindkét fenti csoportba tartozó mátrixok normál mátrixok.

A hermitikus mátrix - így tehát egy valós szimmetrikus mátrix - sajátértékei mind valósak. Ezzel szemben egy nem szimmetrikus valós mátrix sajátértékei tartalmazhatnak valós értékeket, valamint komplex-konjugált párokat, egy komplex mátrix sajátértékei tetszőleges komplex számok lehetnek.

A normálmátrixok a sajátvektorok szempontjából fontosak. Ha egy normálmátrix sajátértékei mind különbözőek, akkor, a sajátvektorok egy teljes ortogonális bázist alkotnak az N dimenziós téren. Ha vannak degenerált sajátértékek, akkor az ezekhez tartozó sajátvektorok csak egy lineárkombináció erejéig vannak meghatározva (saját altér), viszont ortogonalizálhatóak (pl. Gram-Schmidt) és így teljes ortogonális bázis alakítható ki. A normált ortogonális sajátvektorok mint oszlopok által alkotott mátrix unitér. Speciális eset a valós szimmetrikus mátrix sajátvektoraiból alkotott mátrix, ez ortogonális, mert a sajátvektorok valósak.

Ha a mátrix nem normálmátrix, (pl. gyakran előfordulnak az ún. véletlen mátrixok, vagyis valós nem szimmetrikus mátrixok). akkor a sajátvektorok általában nem ortogonálisak, és nem biztos (de gyakran azért igen), hogy teljes bázist alkotnak. Viszont a jobb és baloldali sajátvektorok között mindig fennáll a következő ortogonalitás. Írjuk fel a baloldali sajátvektorokat

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{x}$$

Ezek megegyeznek a transzponált mátrix jobboldali sajátvektoraival, vagyis szimmetrikus mátrixra a jobb és baloldali

sajátvektorok megegyeznek. Mivel a determináns invariáns a transzponálásra, a karakterisztikus egyenletet itt is felírva láthatjuk, hogy a sajátértékek a jobb és baloldali sajátvektorokra megegyeznek. Ha mint a jobb és baloldali sajátvektorokból készítünk egy-egy mátrixot, \mathbf{X}_L sorai a baloldali és \mathbf{X}_R oszlopai a jobboldali sajátvektorok, akkor a sajátértékegyenletek

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_R = \mathbf{X}_R \cdot \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$$

$$\mathbf{X}_L \cdot \mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) \cdot \mathbf{X}_L$$

alakulna, és megszorozva őket a jobb ill. baloldali sajátvektormátrixokkal, a baloldal megegyeznek, így a jobb oldalak is

$$(\mathbf{X}_L \cdot \mathbf{X}_R) \cdot \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) \cdot (\mathbf{X}_L \cdot \mathbf{X}_R)$$

Ez a felcserélés viszont csak akkor teljesülhet, ha $(\mathbf{X}_L \cdot \mathbf{X}_R)$ is diagonális, vagyis minden jobb oldali sajátvektor ortogonális az összes többi baloldali sajátvektorra, kivéve a neki megfelelőt, az azonos sajátértékhez tartozót. Ha a diagonálisban is van 0 elem, akkor a bázis nem teljes. A vektorok normalizálhatóak, így elérhető, hogy (ha létezik az inverz) a jobb és baloldali sajátvektorokból a fenti módon alkotott mátrixok egymás inverzei legyenek.

Így igaz, hogy

$$\mathbf{X}_R^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_R = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$$

Az ilyen típusú transzformációt, ahol egy mátrixszal és az inverzével jobbról, balról szorzunk egy mátrixot, *hasonlósági transzformáció*nak hívunk. Belátható a karakterisztikus egyenletet felírva, hogy a hasonlósági transzformáció nem változtatja meg a sajátértékeket. Valós szimmetrikus mátrixok esetén $\mathbf{X}_R^{-1} = \mathbf{X}_L = \mathbf{X}_R^T$ vagyis a hasonlósági transzformáció *ortogonális transzformáció* is.

Ezen az összefüggésen alapulnak általában a sajátproblémát megoldó programok. Vagyis kellően megválasztott transzformációval a mátrixot egyre közelítjük a diagonálishoz,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P}_1^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_2^{-1} \cdot \mathbf{P}_1^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \rightarrow \dots$$

így megkapva a sajátértékeket az átlóban illetve a sajátvektorok mátrixát

$$\mathbf{X}_R = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \dots$$

A feledat tehát olyan \mathbf{P}_i transzformációk megtalálása, amelyek pl. sorban kinullázzák a mátrixelemeket a diagonálison kívül. Ezt a transzformációt vagy explicit módon felírjuk (Jacobi transzformáció) vagy pedig faktorizációval kapjuk meg (QR-transzformáció).

Léteznek kifinomult sajátértékprobléma programcsomagok (NAG, IMSL, EISPACK) amelyek külön optimalizált megoldást kínálnak a következő esetekre

- összes sajátvektor és sajátérték kell
- összes sajátérték és néhány (pl a legnagyobbakhoz tartozó) sajátvektor kell
- csak a sajátértékek kellene

illetve ezen belül

- valós, szimmetrikus, tridiagonális vagy sávmátrix
- valós szimmetrikus
- valós nem szimmetrikus
- komplex hermitikus
- komplex nem-hermitikus.

Itt valós szimmetrikus mátrixokra írunk fel módszereket.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} & \dots & a'_{1p} & \dots & a'_{1q} & \dots & \\ & & & \dots & & & \\ a'_{p1} & \dots & a'_{pp} & \dots & a'_{pq} & \dots & a'_{pn} \\ & & & \dots & & & \\ a'_{q1} & \dots & a'_{qp} & \dots & a'_{qq} & \dots & a'_{qn} \\ & & & \dots & & & \\ & \dots & a'_{np} & \dots & a'_{nq} & \dots & \end{bmatrix}$$

akkor csak a fenti elemek változnak meg az allábbiak szerint
 $(r \neq p, q)$

$$a'_{rp} = ca_{rp} - sa_{rq}$$

$$a'_{rq} = ca_{rq} + sa_{rp}$$

$$a'_{pp} = c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2sca_{pq}$$

$$a'_{qq} = s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2sca_{pq}$$

$$a'_{pq} = (c^2 - s^2)a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq})$$

Tegyük a'_{pq} -t 0-vá. Így az elforgatási szögre kapunk egy egyenletet

$$\operatorname{ctg} 2\phi = \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

Igaz, hogy ha ezek után egy másik elemet 0-zunk ki a következő lépésben, akkor az előző elem elromlik, de belátható, hogy a diagonálison kívüli elemek négyzetösszege ($S = \sum_{r \neq s} |a_{rs}|^2$) egy lépésben $2|a_{pq}|^2$ -el csökken, vagyis monoton módon a 0-hoz tart.

Ha tehát ezeket a transzformációkat egymás után alkalmazzuk, akkor a mátrix diagonalizálódik, és a diagonálisban a sajátértékeket kapjuk. A sajátvektorok a transzformációk szorzatmátrixának oszlopaiból $\mathbf{X}_R = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \dots$ kaphatóak

$$\mathbf{X}_R^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_R = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$$

értelmében. Az eredeti módszer (Jacobi, 1846) szerint mindig a legnagyobb elem indexei alapján praktikus a következő transzformációs mátrixot felírni. Ez, kézzel, kis mátrixoknál valóban jó módszer, viszont N^2 -el skálázik ennek megkeresése, ami jelentősen lerontja a módszer sebességét. E helyett működik az is, hogy sorban (akár egymás után többször) végigmegyünk a nemdiagonális elemeken.

A Householder redukció

Az alábbi módszernél először előkészítjük a mátrixot a Householder redukcióval oly módon, hogy úgy transzformáljuk, hogy tridiagonális alakra hozzuk, majd ezt faktorizáljuk, és a faktorizációból kapjuk azt a mátrixot, amely ortogonális transzformációval háromszög alakra hoz, így megadja a sajátértékeket.

A tridiagonalizáláshoz írjuk fel az ún. Householder mátrixot a következő alakban

$$\mathbf{P} = \mathbf{1} - 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^T$$

alakban, ahol \mathbf{w} egy egységnyi hosszúságú vektor, vagyis $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1$. Belátható, hogy $\mathbf{P}^2 = \mathbf{1}$, vagyis $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$ és a definíció alapján látható, hogy $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, így $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ vagyis ortogonális transzformáció \mathbf{P} .

Legyen \mathbf{x} az \mathbf{A} mátrix első oszlopa és legyen $\mathbf{u} = \mathbf{x} \pm |\mathbf{x}| \mathbf{e}_1$, ahol \mathbf{e}_1 az első egységvektor $[1, 0, \dots, 0]^T$. A

$$H = \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$$

normáló faktorial felírhatunk egy Householder mátrixot

$$\mathbf{P} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T}{H}$$

Ha ez hat az \mathbf{A} mátrixra, ezen belül az első oszlopára \mathbf{x} -re is

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}}{H} \cdot (\mathbf{x} \pm |\mathbf{x}| \mathbf{e}_1)^T \cdot \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} - \frac{2\mathbf{u} \cdot (|\mathbf{x}|^2 \pm |\mathbf{x}|x_1)}{2|\mathbf{x}|^2 \pm 2|\mathbf{x}|x_1} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{u} \\ &= \pm |\mathbf{x}| \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

akkor láthatjuk, hogy az első elem kivételével mindegyiket lenullázza. Végezzünk tehát transzformációkat sorra

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$$

alakban, ahol \mathbf{P}_i $i = 1 \dots N$ legyen egy olyan mátrix, melynek első i oszlopa és sora egy egységvektorral egyezik meg, a többi része pedig egy olyan Householder mátrix, amelyik az i -ik oszlop alsó $N - i$ elemével készült a fenti módon. Ez tehát az utolsó $N - i - 1$ elemet kinullázza az i -ik sorban és oszlopban, vagyis csak a tridiagonális alak marad.

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & P_k^{(n-k)} & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & k & 0 & \dots & 0 \\ k & & & & \\ 0 & & & & \\ & & & \text{tetsz.} & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

Ez a transzformáció \mathbf{P} definíciójának behelyettesítésével olyan alakra hozható, amelyben nem szerepel explicit mátrix szorzás, csak vektorszorzások, jelentősen gyorsítva az algoritmust. Az így leegyszerűsített mátrix sajátértékei ugyanazok mint az eredeti mátrixé, hiszen ortogonális transzformációkat végeztünk. \mathbf{A} sajátvektorait pedig úgy kapjuk, hogy az egyszerűsített mátrix sajátvektorait beszorozzuk az akkumulálódott vektorral $\mathbf{V} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \dots$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}$$

A QR módszer

A sajátértékek megkereséséhez használjuk a faktorizációs módszert, ami elvileg a fenti egyszerűsítés nélkül is és általános mátrixra is alkalmazható, de úgy nem optimális numerikusan. Az alapötlet az, hogy bontsuk fel a mátrixot egy ortogonális és egy felső háromszögmátrix szorzatára

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$$

A dekompozíció megtehető Householder mátrixok segítségével, úgy hogy a diagonális alatti elemeket sorra kinullázzuk. Ezen mátrixok szorzata egy ortogonális mátrix lesz, aminek inverze is ortogonális, a jobb oldalon pedig egy felső háromszögmátrix jelenik meg. Általánosan a QR transzformáció N^3 -el skálázik, így általános mátrixra nagyon lassú, tridiagonális mátrixra viszont csak N -el. Így a Householder redukció után alkalmazva (ami szintén N^3 -el skálázott de kisebb együtthatóval, mint az általános QR transzformáció vagy az ménti Jacobi transzformáció) gyors.

Mivel az ortogonalitás szerint $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1}$, ezért $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}$.

Ha fordított sorrendben írjuk fel a faktormátrixokat akkor egy másik mátrixot kapunk, hiszen nem követelmény a felcserélhetőségük

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}$$

Az előbb levezetett összefüggésből viszont

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$$

vagyis a fordított sorrendben felírt faktormátrixok az eredetinek ortogonális transzformációját adják. Ha ezt a transzformációt egymás után többször alkalmazzuk

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{Q}_k$$

akkor belátható (hosszú), hogy ha a sajátértékek abszolút értékei különbözőek, akkor \mathbf{A}_k határértéke egy felső háromszög mátrix lesz. Ennek átlójában a sajátértékek lesznek melyek, mivel csak hasonlósági transzformációkat alkalmazunk, megegyeznek az eredetivel. A háromszög mátrix sajátvektorai a triviális egységvektorok, és ezekből hasonlóan mint a Householder redukciónál láttuk megkaphatóak \mathbf{A} sajátvektorai.

\mathbf{A}_k határértékére vonatkozó bizonyítás azt is megmutatja, hogy a diagonális alatti elemek $(A_k)_{ij} = (\lambda_i/\lambda_j)^k$ rendben tartanak 0-hoz. Ez a konvergencia akkor romolhat le, ha van két sajátérték, amely közel egyforma. Ekkor alkalmazhatjuk a sajátvektorok eltolását. Ismert, hogy ha a mátrixból az egységmátrix τ -szorosát levonjuk, akkor az így kapott mátrix sajátértékei az erekeinél τ -val kisebbek. Ha tehát erre az eltol mátrixra alkalmazzuk a dekompozíció iterációs algoritmusát, akkor az eltolt sajátértékek aránya határozza meg a konvergenciát, ami τ megfelelő választása esetén sokat javíthat.

Nem szimmetrikus mátrixok sajátérték problémájára nem létezik ilyen hatékony általános módszer. Ekkor ugyanis

bizonyos esetekben a sajátértékek nagyon érzékenyek lehetnek a mátrixelemek nagyon kis változtatására másrészt lehet olyan is a mátrix, hogy a sajátvektorok nem alkotnak teljes bázist. A sajátértékek (illetve azok közelítése) megkapható úgy, hogy a mátrixot úgynevezett Hessenberg alakra hozzuk, ami hasonlít pl. a felső háromszög alakhoz, azzal a különbséggel, hogy a mátrix átlója alatti al-átló sem nullákból áll. Ez vagy a Gauss eliminációnál említett átrendezéssel vagy a Householder transzformációkkal tehető meg. Ezután a szimmetrikus esethez hasonlóan alkalmazhatjuk a QR-módszert. Ez a szimmetrikus esettel szemben ahol $O(N)$ iterációra volt szükség $O(N^2)$ lépést igényel a Hessenberg alakú mátrixokra. Részletek [1]-ben.

Hatványiteráció

Gyakran szükség van a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározására akkor is, ha az összes sajátvektor meghatározása nem lehetséges a számítási kapacitás miatt. Ha valós normálmátrixról van szó, akkor a sajátvektorai teljes ortonormált bázist alkotnak. Akkor, ha a legnagyobb abszolútértékű sajátérték nem degenerált, akkor alkalmazható az alábbi iteráció.

Egy tetszőleges \mathbf{y}_0 kezdeti vektor felbontható

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{x}_k$$

alakban, a jobb oldali sajátvektorokkal. Ezt megszorozva az \mathbf{A} mátrixszal képezhető egy iteráció

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_k \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k$$

ha leosztunk a legnagyobb sajátértékkel akkor minden együttható 1-nél kisebb lesz, kivéve az elsőt, így nagy m -re 0-hoz

tartanak vagyis

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^m} \mathbf{A}^m \mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{x}_1$$

az első sajátvektor megkapható az iterált vektor határértékeként.

A sajátérték is megkapható, ha veszünk egy \mathbf{v}^T vektort, amely nem ortogonális az első sajátvektorra. A fenti egyenlet alapján

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^m} \mathbf{A}^m \mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^{m+1}} \mathbf{A}^{m+1} \mathbf{y}_0$$

és ha \mathbf{v}^T nem ortogonális az első sajátvektorra, akkor ha vele beszorzunk mindkét oldalon, akkor nem 0 lesz az eredmény, így a bal oldallal leosztva azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{y}_{m+1}}{\mathbf{v}^T \mathbf{y}_m}$$

Inverz hatvány iteráció

Ezt a módszert szintén akkor célszerű alkalmazni ha valahonnan ismert néhány sajátérték, és a hozzá tartozó sajátvektorokat szeretnénk meghatározni. Vegyük az alábbi sajátérték problémát

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(j)} = \lambda^{(j)} \mathbf{x}^{(j)}$$

ahol a felső index a sajátvektorokat és sajátértékeket indexeli. Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert is:

$$(\mathbf{A} - \tau \mathbf{1}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

ahol a vektorokat fejtsük ki a sajátértékek bázisán

$$\mathbf{y} = \sum_j \alpha_j \mathbf{x}^{(j)} \quad \mathbf{b} = \sum_j \beta_j \mathbf{x}^{(j)}$$

A sajátértékegyenletnek is felírhatjuk τ -val eltolt változatát

$$(\mathbf{A} - \tau \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x}^{(j)} = (\lambda^{(j)} - \tau) \mathbf{x}^{(j)}$$

Ha most az egyenlet mindkét oldalát α_j -vel súlyozva felösszegezzük, akkor a bal oldalon a lineáris egyenletrendszert bal oldalát kapjuk, a jobb oldalak egyenlősége pedig a következőt adja:

$$\sum_j \alpha_j (\lambda^{(j)} - \tau) \mathbf{x}^{(j)} = \sum_j \beta_j \mathbf{x}^{(j)}$$

aminek

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \tau}$$

megoldása, vagyis

$$\mathbf{y} = \sum_j \frac{\beta_j \mathbf{x}^{(j)}}{\lambda_j - \tau}$$

Ez a kifejezés egy konstans szorzó erejéig megegyezik az egyik sajátvektorral, ha a hozzá tartozó sajátérték τ -val megegyezik.

Az iteráció tehát úgy zajlik, hogy kiindulunk egy tetszőleges (random) \mathbf{b} vektorból, és egy τ -ból amely közel van valamelyik sajátértékhez. Az így felírt egyenletrendszer megoldása (\mathbf{y}) lesz a sajátvektor első közelítése. Ezután ezt helyettesítjük \mathbf{b} helyére. Ebből az előző módon kapható

$$\sum_j \alpha_j (\lambda^{(j)} - \tau) \mathbf{x}^{(j)} = \sum_j \frac{\beta_j}{\lambda_j - \tau} \mathbf{x}^{(j)}$$

illetve

$$\mathbf{y}_2 = \sum_j \frac{\beta_j \mathbf{x}^{(j)}}{(\lambda_j - \tau)^2}$$

Az iterációt folytatva a nevezőben egyre magasabb hatvány szerepel, vagyis a megfelelő sajátvektor egyre élesebben kiemelkedik.