BSc Fizika Vektorszámítás 2. gyakorló feladatsor

$\boxed{1.}$ Számoljuk ki a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ mennyiségekre az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ alapműveletek eredményét!

2. $\boxed{\text{a,}}$ A sík pontjait előbb tükrözzük az x tengelyre, aztán pozitív irányban elforgatjuk α szöggel. Írjuk fel e tükrözés és forgatás mátrixait külön, majd az együttes transzformáció mátrixát!

   $\boxed{\text{b,}}$ Most írjuk fel az $\underline{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ irányvektorral adott, origón átmenő egyenesre való $\underline{\underline{T}}$ tükrözés mátrixát két dimenzióban!

   c, Ennek segítségével állapítsuk meg, milyen α esetén azonos az a, pontbeli együttes transzformáció a $\underline{\underline{T}}$ tükrözéssel!

$\boxed{3.}$ Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét!

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 7 & 11 \\ -13 & 17 & -19 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -5 & 7 & 11 & 0 \\ -3 & 7 & -9 & 2 \\ -13 & 17 & -19 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket Gauss-eliminációval!

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 0 \\ 7x + 10y - 5z &= 2 \end{aligned}$$

$\boxed{5.}$ Egy autó által megtett út a következő időfüggvénnyel írható le:

$$x(t) \quad = \quad at^2 - 2t^3$$

   a) Adjuk meg minden időpillanatban a sebességét, ha $a = 4$!

   b) Van-e olyan pillanat, amikor megfordult? Hogyan függ ennek az időpillanatnak az értéke az a paramétertől?

   c) Mi volt az a maximális távolság, amire eltávolodott a kiindulóponttól a $0 < t < 3$ időtartam alatt? Hogyan függ ez az érték az a paramétertől?

6. a) Számoljuk ki az $U = x^3y^2 + sin(z^2)/x^3$ skalármező gradiensét!

   b) Számoljuk ki az $\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} x^3y^2 \\ 2z^3y^2 \\ 3x^3z^2 \end{pmatrix}$ vektormező rotációját!

   c) Számoljuk ki az a) pontbeli eredmény, mint vektormező divergenciáját!

7. Határozzuk meg annak a transzfomációnak a mátrixát, ami ferde irányban nyújt!. A ferde irány legyen az x és y tengelyek közti szög felezőjének iránya, a nyújtási arány legyen a ebben az irányban, és ne legyen nyújtás rá merőlegesen (az a komponens ne változzon)! Ezt kétféleképpen is elvégezhetjük:

   a, Összerakjuk a mátrixot az alapján, hogy a tengelyirányú egységvektorok mibe transzformálódnak. Ezeket pedig úgy számoljuk ki, hogy geometriailag felbontjuk a nyújtás irányába mutató, és arra merőleges vektorokra. Azokra a nyújtás hatása egyszerű. A nyújtás eredményeképpen kapott vektorokat pedig öszeadjuk.

b, Próbáljuk meg a transzformációt geometriailag felbontani egy forgatás, egy tengelyirányú nyújtás és egy újabb forgatás egymásutánjára. Ekkor a forgatás és tengelyirányú nyújtás mátrixaiból a ferde nyújtásét megkapjuk.

c, Az a, és b, pontban azt kellett kapnunk, hogy

$$\begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg e mátrix inverzét, négyzetét és köbét spektrálfelbontás segítségével! Értelmezzük geometriailag a hatványaiban (csak) erre a mátrixra látható szabályosságot!

$\boxed{8.}$ a) Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

b) Vizsgáljuk meg, hogyan változnak meg az eredmények, ha mátrixhoz az egységmátrixot, vagy annak 5-szörösét adjuk hozzá! Mit mondhatunk általánosan?

9. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, diadikus felbontását (azaz spektrálfelbontását):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(itt valamelyik az egységmátrix esetleg?), valamint az $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorra merőleges síkra való tükrözés mátrixa.

10. a) Írjuk fel annak az $\hat{A}$ operátornak a mátrixát, amire $\hat{A}\underline{x} = \underline{a} \times \underline{x}$, ahol $\underline{a}$ egy előre adott vektor!

b) Határozzuk meg e mátrix milyen valós sajátérték(ek)kel rendelkezik, és mi a hozzá(juk) tartozó sajátvektor?

11. Írjuk fel egy x tengely körüli 45 fokos és egy y tengely körüli 30 fokos forgatás egymásutáni elvégzését leíró mátrixot! Ellenőrizzük, hogy ez egyetlen forgatásnak felel-e meg, azaz ez is ortogonális mátrix-e és van-e egységnyi sajátértéke! Milyen tengely körül forgat és mekkora szöggel?

12. Határozzuk meg az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, diadikus felbontását, valamint ezek segítségével az $\underline{\underline{A}}^{-3}$, $\sin(\underline{\underline{A}}\omega t)$ mátrixokat!

13. a) Az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ összefüggésekkel definiált Fibonacci számokat mátrix segítségével így írhatjuk le:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Számoljuk ki az itt szereplő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait és diadikus felbontását!

b) Ezek alapján számoljuk ki az F_n-nek F_0 és F_1 értékeiből való előállításához szükséges hatványozott mátrixot, majd abból F_n értékét! Így zárt képletet kapunk rá.

14. Milyen görbén fekszenek az alábbi egyenlet megoldásai?

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy + 16x + 19 = 0$$